Tema 8: Tipos de EVT

27 y 31 de mayo, 7 de junio de 2010

1. EVT de dimensión finita
   - Teorema de Tychonoff
   - Teorema de Riesz
   - Ejemplos
2. EVT normables
   - Funcional de Minkowski
   - Criterio de normabilidad
3. Espacios localmente acotados
4. Espacios localmente convexos
5. EVT metrizables
   - Metrizabilidad
   - F-espacios
   - Espacios de Fréchet

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es
  - (a) Continuo $\iff$ su núcleo es cerrado
  - (b) Abierto $\iff$ es sobreyectivo
- En un EVT separado, todo subespacio cerrado de codimensión finita está complementado

¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto

(b) X es localmente compacto

(c) La bola cerrada unidad de X es compacta

(d) X tiene dimensión finita

Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(1) X es localmente compacto

(2) Existe en X un entorno de cero precompacto

(3) X tiene dimensión finita

Espacios L_p de dimensión finita

Los espacios l_p^N

Espacio de medida: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, μ = número de elementos

$$\int_\Omega x \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} x(k) \qquad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos: $\mathbb{K}^N$ con la topología producto

$$l_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty)$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \mathbb{K}^N, 1 \leqslant p < \infty)$$

$$\|x\|_\infty = \max\{|x(k)| : 1 \leqslant k \leqslant N\} \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

Desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} |y(k)|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

Funcional de Minkowski

Definición

X espacio vectorial, $E \subseteq X$, E absorbente.

Funcional de Minkowski de E:

$$\nu_E : X \to [0,\infty[\qquad \nu_E(x) = \inf\{\rho > 0 : x \in \rho E\} \quad (x \in X)$$

Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\}$
- Positivamente homogéneo: $\nu_E(rx) = r\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ r \geqslant 0)$
- E equilibrado o convexo $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- E equilibrado $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\,\nu_E(x) \quad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{K})$
- E convexo $\implies \nu_E(x+y) \leqslant \nu_E(x) + \nu_E(y) \quad (x, y \in X)$
- E absolutamente convexo
  $$\implies \begin{cases} \nu_E \text{ seminorma} \\ \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leqslant 1\} \end{cases}$$

Envolvente convexa

X espacio vectorial, $E \subseteq X$. Envolvente convexa de E: intersección de todos los subconjuntos convexos de X que contienen a E, mínimo subconjunto convexo de X que contiene a E. Descripción:

$$\operatorname{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \rho_1, \ldots, \rho_n \geqslant 0,\ \sum_{k=1}^{n} \rho_k = 1 \right\}$$

Envolvente absolutamente convexa: $|\operatorname{co}| E = \operatorname{co}(\mathbb{D} E) = \operatorname{co}(\mathbb{T} E)$ mínimo subconjunto convexo y equilibrado de X que contiene a E. Descripción:

$$|\operatorname{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \ : \ n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E,\ \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K},\ \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \leqslant 1 \right\}$$

Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Un EVT es seminormable si, y sólo si, contiene un entorno de cero convexo y acotado. Por tanto, un EVT es normable si, y sólo si, es separado y contiene un entorno de cero convexo y acotado

EVT localmente acotados

Definición

Un EVT es localmente acotado cuando admite un entorno de cero acotado

Casinorma

X espacio vectorial, $\nu : X \to \mathbb{R}$ casinorma cuando:

$$(1)\quad \nu(\lambda x) = |\lambda|\,\nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$$

$$(2)\quad \exists M > 0 \ :\ \nu(x+y) \leqslant M\big(\nu(x) + \nu(y)\big) \quad \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma ν: Tomando $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leqslant \varepsilon\}$, la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una única topología vectorial en X

Propiedades

- Localmente acotado $=$ Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales,

$$\prod_{i\in I} X_i \ \text{localmente acotado} \iff \begin{cases} X_i \ \text{localmente acotado} \ \forall i \in I \\ I \ \text{finito} \end{cases}$$

Espacios localmente convexos

Topología localmente convexa: topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

Espacio localmente convexo (ELC): espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas: X espacio vectorial, Φ familia de pseudonormas en X. Cada $\nu \in \Phi$ genera una topología vectorial $\mathcal{T}_\nu$. Topología (vectorial) asociada a Φ:

  $$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu \ : \ \nu \in \Phi\}$$

  Si Φ es una familia de seminormas, $\mathcal{T}_\Phi$ es localmente convexa
- Recíprocamente: la topología de cualquier ELC es la asociada a una familia de seminormas.
- Todo ELC separado es isomorfo a un subespacio de un producto de espacios normados

Metrizabilidad

Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si X es un EVT, equivalen:

(a) X es pseudonormable

(b) X es semimetrizable

(c) X tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio de un producto de EVT metrizables
- Todo EVT es completamente regular

EVT metrizables

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \quad \text{semimetrizable} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable} \quad \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \, \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1 + \nu_n\big(x(n)\big)}$$

F-espacios

F-espacio $=$ EVT completo metrizable

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν, X es un F-espacio cuando

$$x_n \in X \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{n=1}^{\infty} \nu(x_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n \geqslant 1} x_n \quad \text{converge}$$

(Toda serie absolutamente convergente es convergente)

Estabilidad y completación

- X EVT metrizable, $M \subseteq X$ subespacio, $M = \overline{M}$:

$$X \quad \mathrm{F-espacio} \iff M \text{ y } X/M \quad \mathrm{F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio
- Todo EVT metrizable es isomorfo a un subespacio denso de un (único) F-espacio
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio denso de un (único) EVT separado y completo

Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet $=$ F-espacio localmente convexo
$=$ ELC completo metrizable

Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$ de seminormas

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n\big(x(n)\big)}{1+\nu_n\big(x(n)\big)}$$

- La clase de los espacios de Fréchet es estable por subespacios cerrados, cocientes separados y productos numerables